Marmara Universitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Analiz 3
Ara sınav

Taylan Şengül
Tarih: 07/11/2016

Soru:	1	2	3	4	5	6	Toplam
Puan:	15	15	25	15	25	20	115
Skor:							

AD/SOYAD: ____________________

İMZA: ____________________

ÖĞRENCİ NO: ____________________

1. (15 puan) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2x^{2n}}$ serisinin $[2,\infty)$ kümesinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

$$|R_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{1+k^2x^{2k}} \qquad \forall x \in [2,\infty)$$

$$1+k^2x^{2k} \geqslant k^2x^{2k} \geqslant x^{2k} \qquad \forall k \geqslant 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^k}{1+k^2x^{2k}} \leqslant \frac{x^k}{x^{2k}} = \frac{1}{x^k} \leqslant \frac{1}{2^k} \qquad \forall x \geqslant 2.$$

$$|R_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.$$

$$\|R_n\| \leqslant \frac{1}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|R_n\| = 0.$$

Seri düzgün yakınsaktır.

2. $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{x^2+n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ olsun.
   (a) (5 puan) Bu dizi hangi x değerleri için noktasal yakınsar? Noktasal limiti nedir?
   (b) (5 puan) $a > 0$ olsun. Bu dizi $[-a, a]$ aralığında düzgün yakınsar mı? Neden?
   (c) (5 puan) Bu dizi $[0, \infty)$ aralığında düzgün yakınsar mı? Neden?

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx^3}{x^2+n^2} = x^3 \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{x^2+n^2} = x^3 \cdot 0 = 0 \equiv f(x).$

b) $|f_n(x)| = \dfrac{n|x|^3}{x^2+n^2} \leq \dfrac{na^3}{x^2+n^2} \leq \dfrac{na^3}{0^2+n^2} = \dfrac{a^3}{n}, \ \forall x \in [-a,a].$

$\Rightarrow \|f_n\| \leq \dfrac{a^3}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$

Yakınsama düzgündür.

c) $\|f_n\| \geq |f_n(n)| = \dfrac{n\,n^3}{n^2+n^2} = \dfrac{n^4}{2n^2} = \dfrac{n^2}{2}.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\| = \infty$

Yakınsama düzgün değildir.

3. (15 points) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n(n+x^2)}$ serisinin $\mathbb{R}$ üzerinde yakınsak olduğunu ama düzgün yakınsak olmadığını gösterin.

a) $0 \leqslant \frac{x^2}{n(n+x^2)} \leqslant \frac{x^2}{n^2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ her x için yakınsak olduğundan ($p=2$ serisi), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n(n+x^2)}$ serisi de yakınsak olur.

b) $|R_n(x)| \geqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{x^2}{k(k+x^2)}$

$\|R_n\| \geqslant |R_n(M)| \geqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{M^2}{k(k+M^2)}$

$\|R_n\| = \lim_{M\to\infty} \|R_n\| \geqslant \lim_{M\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{M^2}{k(k+M^2)} = \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k}$

$\|R_n\| = \lim_{N\to\infty} \|R_n\| \geqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k}$

$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Zira $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ serisi harmonik seridir ve toplam ıraksar (sonsuzdur).

Yani $\|R_n\| = \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ olur.

4. (a) (5 puan) Dini Teoreminin şartlarını ve sonucunu yazınız.
   (b) (5 puan) $f_n(x) = (x - \frac{\pi}{2})\sin^n x$ dizisinin $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında noktasal limit fonksiyonunu bulun.
   (c) (5 puan) Aynı dizinin noktasal limit fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösterin.

a) $f_n : A \to \mathbb{R}$, A kompakt, f_n'ler sürekli ve monoton artan veya azalan olsun. f_n'lerin noktasal limiti sürekli f fonksiyonu olsun. f_n'ler f'e düzgün yakınsar.

b) $f_n(\pi/2) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\pi/2) = 0.$

$0 \leqslant x < \pi/2 \Rightarrow 0 \leqslant \sin x < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sin^n x = 0.$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \equiv f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, \pi/2].$

c) Dini Teoreminin monotonluk dışında tüm şartlarının sağlandığı aşikardır.

$\sin^{n+1}(x) = \sin^n(x) \sin x \leqslant \sin^n(x) \quad \forall x \in [0, \pi/2].$

$x - \pi/2 \leqslant 0 \Rightarrow (x - \pi/2)\sin^{n+1}(x) \geqslant (x - \pi/2)\sin^n x \quad \forall x \in [0, \pi/2].$

Dolayısıyla $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$. Yani f_n'ler monoton artandır. Dini Teoremi $f_n \xrightarrow{d} f$ olduğunu söyler.

5. (a) (15 puan) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa ise $\lim_{n\to\infty} f_n(1/n) = f(0)$ olduğunu gösterin.

(b) (10 puan) Eğer yakınsama düzgün değilse yukarıdaki önermenin doğru olmayabileceğini gösteren bir örnek verin.

a) f_n'ler sürekli ve yakınsama düzgün olduğundan f'de süreklidir.

$$\left|f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) - f(0)\right| = \left|f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) - f\left(\tfrac{1}{n}\right) + f\left(\tfrac{1}{n}\right) - f(0)\right|$$
$$\leq \left|f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) - f\left(\tfrac{1}{n}\right)\right| + \left|f\left(\tfrac{1}{n}\right) - f(0)\right|$$
$$\leq \|f_n - f\| + \left|f\left(\tfrac{1}{n}\right) - f(0)\right|$$

$f_n \xrightarrow{d} f$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.

f sürekli olduğundan $\lim_{n\to\infty} f\left(\tfrac{1}{n}\right) = f(0)$, yani $\left|f\left(\tfrac{1}{n}\right) - f(0)\right| \to 0$

Dolayısıyla $\left|f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) - f(0)\right| \to 0$, yani $\lim_{n\to\infty} f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = f(0)$.

b) $f_n(x) = (1-x)^n$, $x \in [0,1]$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq f(0) = 1.$$

6. (a) (5 puan) $f_n(x) = n^2 x^n (1-x)^2$ dizisinin $[0,1]$ aralığında noktasal limitini bulun.

(b) (15 puan) Bu dizi noktasal limitine düzgün yakınsar mı? Neden?

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 x^n (1-x)^2 = (1-x)^2 \lim\limits_{n\to\infty} n^2 x^n = (1-x)^2 \cdot 0 = 0 \equiv f(x).$

b) $f_n'(x) = n^2 \left(n x^{n-1} (1-x)^2 + x^n 2(1-x)(-1) \right)$

$= n^2 x^{n-1} (1-x) \left[n(1-x) - 2x \right] = n^2 x^{n-1} (1-x) \left(n - (n+2)x \right)$

$f_n'(x) \Leftrightarrow x=0,\ x=1,\ x=\frac{n}{n+2}.$

x	0		$n/n+2$		1
$f_n'(x)$		$+$		$-$	
$f_n(x)$		$\nearrow$	maksimum	$\searrow$	

$0 \le |f_n(x)| = f_n(x) \le f_n\left(\frac{n}{n+2}\right) = n^2 \left(\frac{n}{n+2}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+2}\right)^2 \quad \forall x \in [0,1].$

$\Rightarrow \|f_n\| = n^2 \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \frac{2^2}{(n+2)^2} = \left(\frac{2n}{n+2}\right)^2 \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n+2}\right)^2 \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = 4 \cdot \frac{1}{e^2} \neq 0$

Dolayısıyla yakınsama düzgün değildir.